بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
یازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۷۲

۱- اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، آنگاه ثابت کنید عدد $A = ۷^p - ۶^p - ۱$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

۲- مثلث ABC به اضلاع a، b و c و مساحت S داده‌شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای مانند P درون آن وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که فاصله‌ی آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب x، y و z باشد، آن است که مثلثی به اضلاع a، y و z و مساحت $S_۱$، مثلثی به اضلاع b، x و z و مساحت $S_۲$ و مثلثی به اضلاع c، x و y و مساحت $S_۳$ وجود داشته باشد که $S_۱ + S_۲ + S_۳ = S$

۳- فرض می‌کنیم n و r دو عدد طبیعی باشند. کوچک‌ترین عدد طبیعی m را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,m\}$ به r زیرمجموعه‌ی $A_۱, A_۲, \ldots$ و A_r دریکی از A_i ها $(۱ \leq i \leq r)$ دو عدد a و b پیدا شوند به‌گونه‌ای که $۱ < \frac{a}{b} \leq ۱ + \frac{۱}{n}$ باشد.

۴- تعداد $n \geq ۲$ نقطه $A_۱, A_۲, \ldots$ و A_n در صفحه داده‌شده‌اند به‌گونه‌ای که هیچ سه‌نقطه [ای] روی یک خط راست واقع نیستند و هر دونقطه‌ی A_i و A_j یا با پاره‌خط A_iA_j به هم متصل‌اند و یا نقطه‌ای مانند A_k وجود دارد که با پاره‌خط‌های A_iA_k و A_jA_k به این دونقطه متصل است.

الف) حداقل تعداد پاره‌خط‌های لازم را پیدا کنید.

ب) در حالتی که $n = ۶$ و $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ یک شش‌ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره‌خط لازم است افزوده شود تا شرایط بالا برقرار گردد.

۵- اگر $D_۱$ و $D_۲$ دو خط متنافر باشند، آنگاه ثابت کنید بی‌نهایت خط راست وجود دارد که [همه‌ی] نقاط روی آن‌ها از این دو خط به یک‌فاصله‌اند.

۶- اگر f(x) و g(x) دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به‌گونه‌ای که کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ برای بی‌نهایت عدد گویای x مقداری گویا گردد، آنگاه ثابت کنید $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می‌توان به شکل نسبت دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

حل مسأله‌های مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۷۲

۱- چون p عددی اول است پس $p \equiv \pm ۱ \pmod{۶}$.

$$۶^۶ \equiv ۱ \pmod{۶} \qquad ۷^۶ \equiv ۱$$

$$۶^{۶k} \equiv ۱ \pmod{۶} \qquad ۷^{۶k} \equiv ۱$$

$$۷ \equiv ۱ + ۶ \Rightarrow ۷^{۶k+۱} \equiv ۶^{۶k+۱} + ۱ \pmod{۴۳}$$

$$۷^۵ \equiv ۶^۵ + ۱ \pmod{۴۳}$$

$$\Rightarrow ۷^{۶t+۵} \equiv ۷^۵ \equiv ۱ + ۶^۵ \equiv ۱ + ۶^{۵+۶t} \pmod{۴۳}$$

برای هر p $\qquad \Rightarrow ۷^p \equiv ۶^p + ۱ \pmod{۴۳}$

۲- شرط غلط است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که

$$a = b = c = ۱,\ x = y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, z = \frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

مثلثی به اضلاع a، y و z وجود دارد که مساحت آن برابر است با $S_۱ = \sqrt{۳} / ۱۲$. به همین ترتیب مثلث‌هایی به اضلاع b، x و y و مساحت $\sqrt{۳} / ۱۲$ وجود دارد. اما نمی‌توان P را داخل ABC یافت که PA=x، PB=y و PC=z زیرا طول PC که باید درون مثلث باشد از طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث یعنی ۱، بیشتر است.

۳- اگر $m \geq rn + r$ ، اعداد rn، rn+۱، . . . و rn + r را در نظر می‌گیریم. دو تا از این اعداد دریکی از A_i ها قرار دارند پس

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in A_i \\ a > b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{rn+i}{rn+j} \leq \frac{rn+r}{rn} = ۱ + \frac{۱}{n}$$

برای $m = rn + r - ۱$ یک مثال می‌آوریم.

برای هر $۱ \leq i \leq r$ تعریف می‌کنیم

$$A_i = \{x \mid x \equiv i \pmod{i}\}$$

ادعا می‌کنیم A_i ها دارای شرایط مسأله هستند. a و b را دو عضو از A_i می‌گیریم که $a > b$ اگر $i \neq r$ ، k و l وجود دارند به‌طوری‌که $a = kr + i$ و $b = lr + i$.

$$\frac{a}{b} = \frac{kr+i}{lr+i} \geq \frac{(l+۱)r}{lr+i} = ۱ + \frac{r}{lr+i}$$

$$\geq ۱ + \frac{r}{lr} = ۱ + \frac{۱}{l}$$

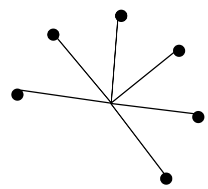
$$> ۱ + \frac{۱}{n}$$

اگر $r=i$ ، k و l وجود دارند که $a=kr$ و $b=lr$.

$$\frac{a}{b}=\frac{kr}{lr}=\frac{k}{l}\geq\frac{l+۱}{l}=۱+\frac{۱}{l}$$
$$>۱+\frac{۱}{n}$$

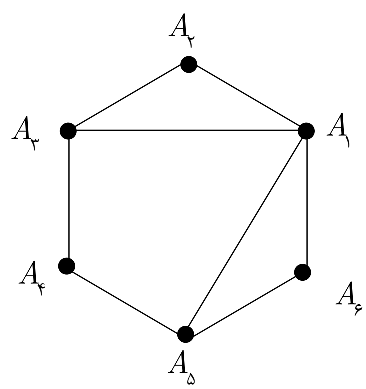
پس درهرصورت اگر $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر از ۱ باشد، از $۱+\frac{۱}{n}$ نیز بیشتر است و حکم برقرار نمی‌شود. پس $m=r(n+۱)$.

۴- $n-۱$. شکل نشان می‌دهد که با $n-۱$ پاره‌خط مسأله قابل‌حل است.



این ادعا را که اقلاً $n-۱$ پاره‌خط لازم است با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=۲$ مسأله بدیهی است فرض کنیم برای $n=k$ درست باشد. اکنون $k+۱$ نقطه‌ی $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{k+۱}$ را که دارای شرایط مسأله باشند در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که تعداد کل پاره‌خط‌های شکل کمتر از k باشد. در این صورت دست‌کم به یکی از این نقاط فقط یک پاره‌خط وصل شده است (چرا؟). اگر این نقطه و این پاره‌خط را از شکل حذف کنیم درنتیجه k نقطه خواهیم داشت (با حفظ شرایط مسأله) که کمتر از $k-۱$ پاره‌خط به هم وصل شده‌اند که مخالف فرض استقراست.

ب) با توجه به شکل با اضافه کردن پاره‌خط شرایط مسأله برقرار می‌شود.



اولاً باید به‌وضوح پاره‌خطی اضافه کنیم ولی اگر با اضافه کردن یک پاره‌خط شرایط مسأله برقرار شود بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود این پاره‌خط‌ها (با توجه به تقارن شکل) $A_۱A_۴$ یا $A_۱A_۳$ هستند که در هر دو صورت نقاط $A_۲$ و $A_۵$ دارای شرایط مسأله نیستند. پس با اضافه کردن تنها یک پاره‌خط نمی‌توان شرایط مسأله را برقرار کرد.

۵- نقطه‌ی دلخواه M را روی $D_۲$ در نظر می‌گیریم. از M خط Δ را موازی با $D_۱$ رسم می‌کنیم. صفحه‌ی نیمساز زاویه‌ی بین $D_۲$ و Δ، (P) را با صفحه‌ی هم فاصله Δ و $D_۱$، (Q)، قطع می‌دهیم. محل تقاطع P و Q را δ می‌نامیم. اگر A نقطه‌ای از δ باشد چون A در P است از $D_۲$ و Δ به یک‌فاصله است. با تغییر دادن M بی‌نهایت خط به دست می‌آید.

۶- **روش اول**. اثبات را با استقرا روی مجموع درجات صورت و مخرج انجام می‌دهیم. اگر درجه‌ی f را به n و درجه g را m بگیریم استقرا روی m+n انجام می‌شود (فرض می‌کنیم $n \geq m$). اگر $m+n=1$ ، حکم واضح است. f به یکی از دو صورت زیر است.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p}{q}(x+a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p}{q(x+a)}$$

فرض کنیم حکم برای همه اعداد کمتر از m+n درست باشد. ثابت می‌کنیم برای m+n درست است. x_0 را یکی از اعدادی می‌گیریم که $\frac{f(x)}{g(x)}$ گویاست و $t(x)$ را می‌گیریم $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ پس

$$t(x_0)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=0 \Rightarrow (x-x_0)\mid t(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x_0)}=t(x)=(x-x_0)u(x)$$

$u(x_0)$ به ازای هر یک از اعداد گویایی که t گویاست گویا می‌شود. (زیرا $x-x_0$ هم گویاست.)

و مجموع درجه‌های صورت و مخرج u برابر $m+n-1$ است. پس $u(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا هستند. اما

$$\frac{f(x)}{g(x)}=t(x)+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$=(x-x_0)u(x)+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$=\frac{(x-x_0)p(x)+\ f(x_0)\,/\,g(x_0)\ \ q(x)}{q(x)}$$

اگر درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر بود، به‌جای $\frac{f}{g},\frac{g}{f}$ را که در شرایط صدق می‌کند در نظر می‌گیریم، و کار را ادامه می‌دهیم.

روش دوم. فرض می‌کنیم f از درجه‌ی n و g از درجه‌ی m باشد. ثابت می‌کنیم اگر $\frac{f}{g}$ به ازای $n+m+1$ مقدار گویا، گویا شود آنگاه $\frac{f}{g}$ را می‌توان به‌صورت تقسیم دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

$$n=\deg(f), m=\deg(g), t=n+m+1$$

$$\alpha_1,\dots,\alpha_t\in\mathbb{Q},\qquad \frac{f}{g}\ \alpha_1\ ,\dots,\frac{f}{g}\ \alpha_t\ \in\mathbb{Q},\qquad \frac{f}{g}\ \alpha_i\ =\beta_i$$

p را یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n با ضریب بزرگ‌ترین درجه برابر ۱ و q را یک چندجمله‌ای از درجه‌ی m می‌گیریم به‌طوری‌که

$$p(\alpha_i) = \beta_i q(\alpha_i), \qquad i = 1, \dots, t$$

چنین چندجمله‌ای‌هایی وجود دارند زیرا اگر f و g را بر ضریب x^n در f تقسیم کنیم دو چندجمله‌ای جدید در t تساوی بالا صدق می‌کنند.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

و مجموعه معادلات

$$\alpha_i^n + a_{n-1}\alpha_i^{n-1} + \dots + a_0 = \beta(b_m \alpha_i^m + b_{m-1}\alpha_i^{m-1} + \dots + b_0)$$

برای $i = 1, 2, \dots, m+n-1$ دارای جواب است (a_j و b_j ها مجهول‌اند) و چون ضرایب دستگاه گویا هستند، دستگاه دارای ریشه‌ی گویاست. پس ضرایب p و q گویا هستند.

از

$$\frac{p(\alpha_i)}{q(\alpha_i)} = \frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}, \qquad i = 1, \dots, m+n+1$$

نتیجه می‌شود

$$pg(\alpha_i) \equiv fq(\alpha_i), \qquad i = 1, \dots, m+n+1$$

درجه‌ی pg و fq، m+n است و به ازای $m+n+1$ مقدار برابرند؛ پس

$$pg \equiv fq \Rightarrow \frac{p}{q} \equiv \frac{f}{g}$$